Segundo recuperatorio del segundo parcial de Complementos de Análisis. 2011

1. (3 ptos.) Analizar la convergencia puntual y uniforme en $[0,1]$ de

$$a)\ f_n(x) = \begin{cases} 2n^2x & \text{si} \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2n} \\ 2n - 2n^2x & \text{si} \quad \frac{1}{2n} < x \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \text{si} \quad \frac{1}{n} < x \leq 1 \end{cases} \quad ; \qquad b)\ g_n(x) = \frac{x^n}{n}$$

2. (1 ptos.) Supongamos que $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge para todo $x \in (-R, R)$ y que $f(x) = 0$ en $(-R, R)$. Probar que $a_n = 0$ para todo $n = 0, 1, 2....$¿Es cierto la recíproca?.

3. (3 ptos.) Analizar la convergencia de

$$a)\ \int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^4}dx \qquad b)\ \int_0^3 \frac{dx}{(x\,(3-x))^{1/3}} \qquad c)\ \int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{1+e^x}dx$$

4. Sea $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{4^n} (x-2)^n$

   (a) (1 pto.)¿Para qué valores e x esta función está bien definida?, es decir, que esta serie efectivamente defina una función real.

   (b) (2 ptos.)Calcular $f'(1)$ con error menor a $0,01$, ¿por qué puedo estar seguro de que existe este valor solicitado'