# Tema 7

# Sucesiones de funciones

**Definición 7.1 –** *Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ y $F(A, \mathbb{R})$ el conjunto de las funciones de $A$ en $\mathbb{R}$. Llamaremos* ***sucesión de funciones*** *de $A$ a cualquier aplicación de $\mathbb{N} \longrightarrow F(A, \mathbb{R})$, y la denotaremos por $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ ó $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$.*

## 7.1 Convergencia puntual.

**Definición 7.2 –** *Diremos que la sucesión de funciones $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ de $A$* ***converge*** *en el punto $a \in A$ si, y sólo si, la sucesión numérica $\{f_n(a)\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente. Es decir, si, y sólo si, existe y es finito el $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(a)$.*

**Definición 7.3 –** *Sea $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones de $A$. Llamaremos* ***conjunto de convergencia*** *de $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ al conjunto de puntos de $A$ en los que converge la sucesión de funciones, es decir, al conjunto $C = \{a \in A : \{f_n(a)\}_{n=1}^{\infty} \text{ converge}\}$.*

*A la función $f\colon C \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, se le llama* ***función límite*** *de la sucesión de funciones y diremos entonces que $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$* ***converge*** *o* ***converge puntualmente*** *(punto a punto) hacia $f$ en $C$.*

*Usaremos, para expresar esto último, la notación $f_n \longrightarrow f$ en $C$.*

Ejemplo 7.4 – Sea $\{f_n\colon [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}\}_{n=1}^{\infty}$, definidas por $f_n(x) = \frac{x}{1+nx}$.

Para cada $x \in [0,\infty)$, $$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{1+nx} = \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0, & \text{si } x = 0 \\ \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x}{1+nx} = 0, & \text{si } x \in (0,\infty) \end{cases}.$$

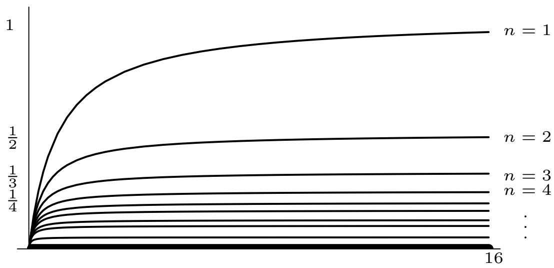



**Fig.** 7.1. *Gráficas de $f$ y $f_n$, para $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 20$.*

Luego $f\colon [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = 0$, es la función límite de $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$. △

Ejemplo 7.5 – Sea $\{f_n\colon [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}\}_{n=1}^{\infty}$, definida por $f_n(x) = \begin{cases} x^n, & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ 1, & \text{si } x > 1 \end{cases}$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0, & \text{si } x \in [0,1) \\ \lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1, & \text{si } x \ge 1. \end{cases}$$

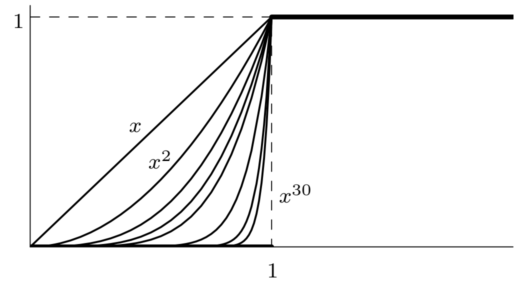



**Fig.** 7.2. *Gráficas de $f$ y $f_n$, para $n = 1, 2, 3, 4, 5, 10, 20, 30$.*

Luego $f: [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in [0,1) \\ 1, & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$, es la función límite. △

Ejemplo 7.6 – Sea $\{f_n: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\}_{n=1}^{\infty}$, definida por $f_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } |x| \leq n \\ 0, & \text{si } |x| > n \end{cases}$. Entonces, para cada $x \in \mathbb{R}$, existe $n_x \in \mathbb{N}$ tal que $|x| \leq n_x$, luego para todo $n \geq n_x$, $f_n(x) = 1$.

En consecuencia, $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x) = 1 = f(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. △

Ejemplo 7.7 – Sea $\{f_n: [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}\}_{n=1}^{\infty}$, donde $f_n(x) = \begin{cases} n, & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{n+1}\right) \\ (n^2+n)(1-nx), & \text{si } x \in \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right) \\ 0, & \text{si } x \in \left[\frac{1}{n}, \infty\right) \end{cases}$

Entonces, para cada $x \in (0,1)$, existe $n_x$ tal que $\frac{1}{n_x} < x$, luego para todo $n \geq n_x$, $f_n(x) = 0$.

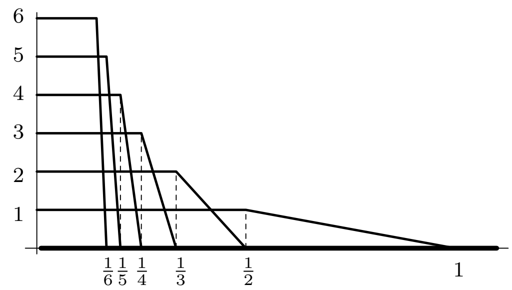



**Fig.** 7.3. *Gráficas de $f$ y $f_n$, para $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.*

En consecuencia, $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x) = f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{n \to \infty} n = \infty, & \text{si } x = 0 \\ \lim\limits_{n \to \infty} 0 = 0, & \text{si } x \in (0, \infty). \end{cases}$ △

## 7.2 Convergencia uniforme.

**Definición 7.8 –** *Diremos que la sucesión de funciones $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ de $A$* ***converge uniformemente*** *en el conjunto $A$ hacia la función $f$ si, y sólo si,*

$$\text{para cada } \varepsilon > 0,\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que si } n \geq n_0 \implies |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,\ \forall x \in A.$$

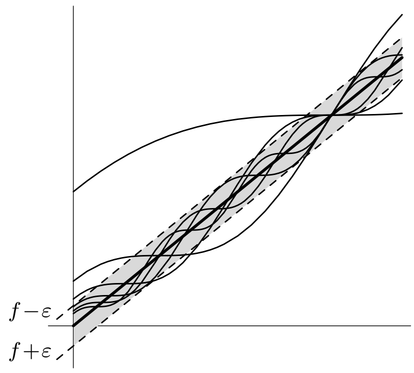
*Usaremos, para indicarlo, la notación $f_n \xrightarrow{c.u.} f$ en $A$*

**Observación 7.9 –** La convergencia (puntual) en cada punto de un conjunto no es lo mismo que la convergencia uniforme en ese conjunto; en el primer caso, la convergencia puntual en el conjunto, es una reunión de puntos en los que hay convergencia individual, mientras que en el segundo caso, la convergencia uniforme en el conjunto, es una convergencia que se verifica para todos los puntos del conjunto a la vez (es decir, de manera uniforme). Si expresamos la definición de convergencia puntual en un conjunto en los mísmos términos en que tenemos definida la convergencia uniforme, la diferencia entre la convergencia uniforme y puntual en $A$ es más clara:

> $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge *puntualmente* en $A$ hacia $f$ $\iff$ para cada $x \in A$, $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ $\iff$ para cada $x$ fijo de $A$ y para cualquier $\varepsilon > 0$, existe un $n_0$ (que depende de $\varepsilon$ y del punto $x$) tal que si $n \geq n_0 \implies |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

En el caso de la convergencia uniforme:

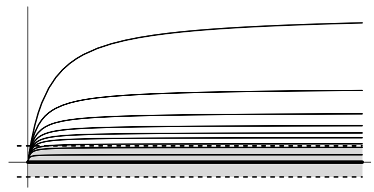
> $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge *uniformemente* hacia $f$ en $A$ $\iff$ para cada $\varepsilon > 0$, existe $n_0$, (que depende de $\varepsilon$, pero no depende de $x$) tal que si $n \geq n_0 \implies |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, *para todos* los $x$ de $A$.




Es claro, por tanto, que si hay convergencia uniforme en un conjunto hay convergencia puntual en todos los puntos del conjunto. Luego para que podamos hablar de convergencia uniforme en un conjunto $A$ debe de haber convergencia puntual en el conjunto.

Gráficamente, la convergencia uniforme significa que para cada $\varepsilon > 0$ todas las funciones de la sucesión, a partir de una dada, están dentro de la “banda” formada por las funciones $f - \varepsilon$ y $f + \varepsilon$.

Ejemplo 7.10– $f_n\colon [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f_n(x) = \frac{x}{1+nx}$.



Como $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x}{1+nx} = 0 = f(x)$, para todo $x \in [0,\infty)$, se tiene que $f_n \longrightarrow 0$.

- ⋄ Si $x = 0$, $f_n(0) = 0$, $\forall n$, luego $|f_n(0) - 0| = 0$.
- ⋄ Si $x > 0$, $\left|\frac{x}{1+nx} - 0\right| = \frac{x}{1+nx} < \frac{x}{nx} = \frac{1}{n}$.

Luego dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0$ tal que $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$, en consecuencia, si $n \geq n_0$, se verifica que $|f_n(x) - 0| = \left|\frac{x}{1+nx} - 0\right| < \frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} < \varepsilon$, para todo $x \in [0,\infty)$, luego $f_n \xrightarrow{c.u.} 0$. △

Ejemplo 7.11– Sea $f_n\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f_n(x) = \begin{cases} -1, & \text{si } x \leq \frac{-1}{n} \\ nx, & \text{si } \frac{-1}{n} < x < \frac{1}{n} \\ 1, & \text{si } x \geq \frac{1}{n} \end{cases}$.

Entonces, para cada $x \in \mathbb{R} - \{0\}$, existe $n_0$ tal que $\frac{1}{n_0} < |x|$, luego para todo $n \geq n_0$, $f_n(x) = \begin{cases} -1, & \text{si } x < 0 \\ 1, & \text{si } x > 0 \end{cases}$. En consecuencia, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) = \begin{cases} -1, & \text{si } x < 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \\ 1, & \text{si } x > 0 \end{cases}$ y

$$|f_n(x) - f(x)| = \begin{cases} |-1-(-1)|, & \text{si } x \leq \frac{-1}{n} \\ |nx-(-1)|, & \text{si } \frac{-1}{n} < x < 0 \\ |0-0|, & \text{si } x = 0 \\ |nx-1|, & \text{si } 0 < x < \frac{1}{n} \\ |1-1|, & \text{si } x \geq \frac{1}{n} \end{cases} = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq \frac{-1}{n} \\ nx+1, & \text{si } \frac{-1}{n} < x < 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \\ 1-nx, & \text{si } 0 < x < \frac{1}{n} \\ 0, & \text{si } x \geq \frac{1}{n} \end{cases}$$

Si tomamos $\varepsilon < \frac{1}{2}$, para cualquier $n$, siempre podemos tomar el punto $x = \frac{1}{2n}$, que verifica que $x = \frac{1}{2n} < \frac{1}{n}$, y, en él, $\left|f_n(\frac{1}{2n}) - f(\frac{1}{2n})\right| = 1 - n\frac{1}{2n} = \frac{1}{2} > \varepsilon$. Luego, para cualquier $n$ podemos encontrar puntos que **no** verifican que $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, en consecuencia, **no** puede existir un $n_0$ como el propuesto en la definición. Es decir, la sucesión no converge uniformemente. $\triangle$

**Criterio del superior 7.12 –** *Sea la sucesión de funciones* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *de* $A$. *Entonces*

$$f_n \xrightarrow{c.u.} f \text{ en } A \text{ si, y sólo si, } \lim_{n\to\infty}\left(\sup_{x\in A}|f_n(x) - f(x)|\right) = 0.$$

<u>Demostración:</u>

$$\begin{aligned} f_n \xrightarrow{c.u.} f &\iff \forall\,\varepsilon > 0,\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ /\ \forall\, n \geq n_0 \Longrightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,\ \forall\, x \in A \\ &\iff \forall\,\varepsilon > 0,\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ /\ \forall\, n \geq n_0 \Longrightarrow \sup_{x\in A}|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \\ &\iff \lim_{n\to\infty}\left(\sup_{x\in A}|f_n(x) - f(x)|\right) = 0. \end{aligned}$$

■

EJEMPLO 7.13 – Estudiar la convergencia uniforme de $\left\{f_n(x) = \frac{x}{(1+x^2)^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ en $[0,1]$.

*<u>Solución:</u>*

Para cada $x \in [0,1]$, $\lim_{n\to\infty} \frac{x}{(1+x^2)^n} = 0$, luego $f_n \longrightarrow 0$.

Como, para cada $n$, la función $g_n(x) = |f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{x}{(1+x^2)^n} - 0\right| = \frac{x}{(1+x^2)^n}$ es continua en el cerrado y acotado $[0,1]$, el superior se alcanzará en el máximo (que existe por el Teorema de Weierstrass).

Busquemos sus extremos. Derivando, obtenemos que

$$g_n'(x) = \frac{(1+x^2)^n - nx(1+x^2)^{n-1}2x}{(1+x^2)^{2n}} = \frac{1+x^2-2nx^2}{(1+x^2)^{n+1}} = 0 \iff 1 + x^2(1-2n) = 0,$$

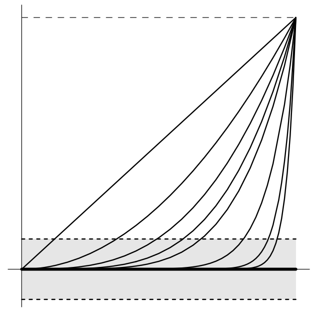
luego para $x = \frac{1}{\sqrt{2n-1}}$ de $[0,1]$ (el otro valor, $\frac{-1}{\sqrt{2n-1}} \notin [0,1]$). En consecuencia, el máximo será $g_n(0) = 0$ ó $g_n(\frac{1}{\sqrt{2n-1}}) = \frac{1}{\sqrt{2n-1}}\left(\frac{2n-1}{2n}\right)^n$ ó $g_n(1) = \frac{1}{2^n}$. Como

- ◇ $\lim_{n\to\infty} g_n(0) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$.
- ◇ $\lim_{n\to\infty} g_n(1) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$
- ◇ $\lim_{n\to\infty} g_n\left(\frac{1}{\sqrt{2n-1}}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2n-1}}\left(1 - \frac{1}{2n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2n-1}} \cdot \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{2n}\right)^{2n\frac{1}{2}} = 0 \cdot e^{-\frac{1}{2}} = 0$,

entonces

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,1]} g_n(x) = \lim_{n\to\infty} \max\left\{g_n(0), g_n\left(\frac{1}{\sqrt{2n-1}}\right), g_n(1)\right\} = 0$$

y la convergencia es uniforme. $\triangle$



EJEMPLO 7.14 – Sean $f_n\colon[0,1)\longrightarrow\mathbb{R}$, definidas por $f_n(x)=x^n$.

Para todo $x\in[0,1)$, se tiene que $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=\lim\limits_{n\to\infty} x^n=0=f(x)$, luego $|f_n(x)-f(x)|=|x^n|=x^n$ para todo $n$. Como $\sup\limits_{x\in[0,1)} x^n=1$, se tiene que $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in[0,1)} x^n=1\neq 0$, luego $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ **no** converge uniformemente en $[0,1)$.

En la figura de la derecha puede observarse la no convergencia uniforme. △

**Proposición 7.15 –** *Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones definidas en el conjunto $A$.*

*a) Si $f_n\xrightarrow{c.u.} f$ en $A\Longrightarrow f_n\xrightarrow{c.u.} f$ en $B$, para todo $B\subseteq A$.*

*b) Sean $B,C\subseteq A$. Si, $f_n\xrightarrow{c.u.} f$ en $B$ y $f_n\xrightarrow{c.u.} f$ en $C$, entonces $f_n\xrightarrow{c.u.} f$ en $B\cup C$.*

<u>Demostración:</u>

a) $f_n\xrightarrow{c.u.} f$ en $A\Longrightarrow\forall\varepsilon>0$, $\exists n_0\in\mathbb{N}$ / $\forall n\geq n_0$ se tiene $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$, $\forall x\in A\Longrightarrow$ $\forall\varepsilon>0$, $\exists n_0\in\mathbb{N}$ / $\forall n\geq n_0$ se tiene $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$, $\forall x\in B\subseteq A\Longrightarrow f_n\xrightarrow{c.u.} f$ en $B$.

b) Si $f_n\xrightarrow{c.u.} f$ en $B\Longrightarrow\forall\varepsilon>0$, $\exists n_1\in\mathbb{N}$ / $\forall n\geq n_1$ se tiene $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$, $\forall x\in B$, y si $f_n\xrightarrow{c.u.} f$ en $C\Longrightarrow\forall\varepsilon>0$, $\exists n_2\in\mathbb{N}$ / $\forall n\geq n_2$ se tiene $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$, $\forall x\in C$. Tomando $n_0=\max\{n_1,n_2\}$, se tiene que $\forall\varepsilon>0$, $\exists n_0\in\mathbb{N}$ tal que $\forall n\geq n_0$ se verifica que

- ◇ si $x\in B$, como $n\geq n_0\geq n_1$, se cumple que $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$, y
- ◇ si $x\in C$, como $n\geq n_0\geq n_2$, se cumple que $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$.

En consecuencia, $\forall n\geq n_0$, se verifica $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$, para todo $x\in B\cup C$, y, por tanto, $f_n\xrightarrow{c.u.} f$ en $B\cup C$. ■

**Observación 7.16 –** Es claro, que el resultado anterior es válido únicamente para uniones finitas, y no aporta nada para uniones de infinitos conjuntos. En efecto, en la sucesión de funciones $f_n(x)=x^n$, para cada $x\in[0,1)$ se tiene que $\lim\limits_{n\to\infty} x^n=0$, luego $x^n\xrightarrow{c.u.} 0$ en cada conjunto $B=\{x\}$ formado por un único punto y, sin embargo, no converge uniformemente en el conjunto $[0,1)=\bigcup\limits_{x\in[0,1)}\{x\}$ unión de todos ellos.

EJEMPLO 7.17 – Sean $f_n(x)=\begin{cases}\frac{1}{n}-1, & \text{si } x\in[-1,0)\\ 1-\frac{1}{n}, & \text{si } x\in[0,1]\end{cases}$.

Como $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}-1=-1,\ \text{si } x\in[-1,0)\\ \lim\limits_{n\to\infty}1-\frac{1}{n}=1,\ \text{si } x\in[0,1]\end{array}\right\}=f(x)$, es la función límite.

◇ En $[-1,0)$, se tiene que $f_n(x)=\frac{1}{n}-1$ y $f(x)=-1$, luego

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in[-1,0)}|f_n(x)-f(x)|=\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in[-1,0)}\left|\frac{1}{n}-1+1\right|=\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in[-1,0)}\left|\frac{1}{n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$$

y converge uniformemente en el intervalo $[-1,0)$.

◇ En $[0,1]$, se tiene que $f_n(x) = 1 - \frac{1}{n}$ y $f(x) = 1$, luego

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,1]} \left|1 - \tfrac{1}{n} - 1\right| = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,1]} \left|-\tfrac{1}{n}\right| = \lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{n} = 0$$

y converge uniformemente en ese conjunto.

En consecuencia, $f_n \xrightarrow{c.u.} f$ en el conjunto unión $[-1,1] = [-1,0) \cup [0,1]$. △

### 7.2.1 Propiedades de la convergencia uniforme.

**Convergencia uniforme y continuidad 7.18 –** *Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones definida en $A$ y que converge uniformemente hacia $f$ en $A$. Si cada $f_n$ es continua en el punto $a \in A$, entonces la función límite $f$ es continua en $a \in A$.*

Demostración:

$f_n \xrightarrow{c.u.} f$ en $A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ / $\forall n \geq n_0$ se tiene que $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$, $\forall x \in A$.

Sea $\forall m \geq n_0$, entonces por ser $f_m$ continua en $a$ se tendrá que $\exists \delta > 0$ / $\forall x \in A$, $|x-a| < \delta \Longrightarrow |f_m(x) - f_m(a)| < \frac{\varepsilon}{3}$ Luego :

$$\begin{aligned} |f(x) - f(a)| &= |f(x) + f_m(x) - f_m(x) + f_m(a) - f_m(a) - f(a)| \\ &\leq |f_m(x) - f(x)| + |f_m(x) - f_m(a)| + |f_m(a) - f(a)| \leq \tfrac{\varepsilon}{3} + \tfrac{\varepsilon}{3} + \tfrac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

siempre y cuando $|x - a| < \delta$, luego $f$ es continua en $a$. ■

**Observación 7.19 –** Es claro, que si las funciones $f_n$ son continuas en todos los puntos de $A$ y $f_n \xrightarrow{c.u.} f$ en $A$, la función límite $f$ tiene que ser continua en todo $A$. Este resultado es muy útil cuando se quiere probar que una sucesión de funciones *no* converge uniformemente en un conjunto: si las funciones $f_n$ son continuas en $A$ y la función límite no es continua en $A$, la convergencia no puede ser uniforme en $A$.

Pero ¡atención!, sólo de que $f$ no sea continua en $A$ **no** puede asegurarse que la convergencia no sea uniforme, puesto que podría ocurrir que las funciones $f_n$ no sean todas continuas en $A$ y la convergencia sí sea uniforme.

**Ejercicio 7.20 –** Búsquese un ejemplo de sucesión de funciones no continuas que converjan uniformemente a una funcion continua. (Puede obtenerse uno modificando adecuadamente la sucesión del ejemplo 7.17.)

**Convergencia uniforme e integración 7.21 –** *Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones definidas en el intervalo $[a,b]$, siendo las $f_n$ funciones integrables Riemann en $[a,b]$. Entonces si $f_n \xrightarrow{c.u.} f$ en $[a,b]$, se tiene que*

*a)* $f$ *es integrable Riemann en* $[a,b]$.

*b)* $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$.

Demostración:

a) $f_n \xrightarrow{c.u.} f$ en $[a,b]$, luego $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$ se tiene que

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}, \quad \text{para todo } x \in [a,b].$$

y, por tanto, $\forall n \geq n_0$,

$$f_n(x) - \frac{\varepsilon}{2(b-a)} < f(x) < f_n(x) + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}, \quad \text{para todo } x \in [a,b].$$

Entonces, por las propiedades de las integrales superior e inferior, se tiene

$$\underline{\int_a^b} \left( f_n(x) - \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \right) dx \leq \underline{\int_a^b} f(x)dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx \leq \overline{\int_a^b} \left( f_n(x) + \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \right) dx$$

y, como las funciones $f_n \pm \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$ son integrables en $[a,b]$, la integral inferior y la integral superior coinciden, obteniéndose que

$$\int_a^b \left( f_n(x) - \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \right) dx \leq \underline{\int_a^b} f(x)dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx \leq \int_a^b \left( f_n(x) + \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \right) dx.$$

Luego

$$\begin{aligned} \overline{\int_a^b} f(x)dx - \underline{\int_a^b} f(x)dx &\leq \int_a^b \left( f_n(x) + \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \right) dx - \int_a^b \left( f_n(x) - \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \right) dx \\ &= \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a} dx = \varepsilon \end{aligned}$$

y, por tanto, $f$ es integrable en $[a,b]$.

b) Por el apartado a), $f$ es integrable en $[a,b]$ y $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ existe, entonces

$$\left| \int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \right| = \left| \int_a^b \left(f_n(x) - f(x)\right)\,dx \right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,dx$$

y, como $f_n \xrightarrow{c.u.} f$ en $[a,b]$, se tiene que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$ se verifica que $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$, $\forall x \in [a,b]$. Luego, si $n \geq n_0$, tenemos que

$$\left| \int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,dx < \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a}\,dx = \varepsilon$$

y, en consecuencia, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$. ∎

Ejemplo 7.22– Calcular $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^{n+1}}{\pi^n} \operatorname{sen}(\tfrac{nx}{n+1})\,dx$.

<u>Solución:</u>

Tomemos $f_n\colon [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow \mathbb{R}$ dadas por $f_n(x) = \frac{x^{n+1}}{\pi^n} \operatorname{sen}(\frac{nx}{n+1})$. Entonces, si $f_n \xrightarrow{c.u.} f$ en $[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, se tendrá que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^{n+1}}{\pi^n} \operatorname{sen}(\tfrac{nx}{n+1})\,dx = \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx.$$

Como $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{x^{n+1}}{\pi^n} \operatorname{sen}(\tfrac{nx}{n+1}) = \lim_{n\to\infty} x \left(\tfrac{x}{\pi}\right)^n \operatorname{sen}\left(\tfrac{nx}{n+1}\right) = x \cdot 0 \cdot \operatorname{sen} x = 0$, se tiene que $f_n \longrightarrow 0$ en $[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Entonces, como $|x| \leq \frac{\pi}{2}$ en $[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, se tiene

$$|f_n(x) - fx| = \left| \frac{x^{n+1}}{\pi^n} \operatorname{sen}\left(\tfrac{nx}{n+1}\right) \right| = \frac{|x|^{n+1}}{\pi^n} \left| \operatorname{sen}\left(\tfrac{nx}{n+1}\right) \right| \leq \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n+1}}{\pi^n} = \frac{\pi}{2^{n+1}}$$

$\forall\, x \in [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, que tiende hacia 0 si $n \to \infty$; luego la convergencia es uniforme. En consecuencia, $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^{n+1}}{\pi^n} \operatorname{sen}(\frac{nx}{n+1})\, dx = 0$. △

**Convergencia uniforme y derivación 7.23–** *Sea* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *una sucesión de funciones definidas en* $(a,b)$ *y derivables en* $(a,b)$. *Supongamos que en un punto* $x_0 \in (a,b)$, *la sucesión* $\{f_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ *converge. Si existe una función* $g$ *tal que* $f_n' \xrightarrow{c.u.} g$ *en* $(a,b)$, *entonces:*

*a) Existe* $f\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ *tal que* $f_n \xrightarrow{c.u.} f$ *en* $(a,b)$.

*b)* $f$ *es derivable en* $(a,b)$ *y* $f'(x) = g(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x)$

Ejemplo 7.24 – Estudiar la convergencia uniforme de $f_n(x) = \frac{nx-\ln(1+nx)}{n^2}$ en $(0,e)$.

- En $x=1$ converge, pues $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(1) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n-\ln(1+n)}{n^2} = 0$.
- Las funciones $f_n(x) = \frac{nx-\ln(1+nx)}{n^2}$ son derivables en $(0,e)$ y la sucesión de las funciones derivadas es $f_n'(x) = \frac{1}{n^2}\left(n - \frac{n}{1+nx}\right) = \frac{x}{1+nx}$.
- Como $f_n'(x) = \frac{x}{1+nx}$ converge uniformemente hacia $g(x)=0$ en $[0,\infty)$ (ver ejemplo 7.10), converge uniformemente hacia $g(x)=0$ en $(0,e)$.

En consecuencia, $f_n \xrightarrow{c.u.} f$ en $(0,e)$, siendo $f$ derivable en $(0,e)$ con $f' = g$. Como $g=0$, se tiene que $f$ es constante y, como $f(1) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(1) = 0$, es la función 0. △

## 7.3 Ejercicios.

**7.1** Estudiar la convergencia uniforme de las siguientes sucesiones de funciones.

a) $f_n(x) = \begin{cases} n^2x(1-nx), & \text{si } 0 \le x \le \frac{1}{n} \\ 0, & \text{si } x \ge \frac{1}{n} \end{cases}$, en $[0,\infty)$.

b) $f_n(x) = \frac{1}{1+nx}$, en $[0,1]$.

**7.2** Sea $f_n(x) = \frac{1}{n+x}$, con $x \in [0,3]$. Hallar $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$.

Estudiar su convergencia uniforme. ¿Para qué valor de $n_0$ se verifica la definición si hacemos $\varepsilon = 0.3$?

**7.3** Estudiar la convergencia uniforme de la sucesión de funciones $f_n(x) = \frac{x^{2n}}{1+x^{2n}}$ en $[-2,5]$.

**7.4** Calcular $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^{\pi} f_n(x)dx$, siendo $f_n(x) = \frac{2nx+\operatorname{sen}^6 nx}{n}$.

**7.5** Sea $f_n(x) = n(1-x^2)^n x$, con $x\in[0,1]$. Hallar $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ y calcular $I_n = \int_0^1 f_n(x)dx$.

¿Qué se puede decir de la convergencia uniforme de $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$?

**7.6** Sea $f_n(x) = \frac{x^n}{n!}$. Hallar su conjunto de convergencia y estudiar si converge uniformemente en él (ver ejercicio 6.4). ¿Qué se puede decir de la convergencia de $\{f_n'\}_{n=1}^{\infty}$?

**7.7** Dada la sucesión de funciones $f_n(x) = \frac{x}{1+nx^2}$, con $x \in (-1,1)$, estudiar su convergencia uniforme así como la convergencia uniforme de $\{f_n'\}_{n=1}^{\infty}$.

**7.8** Estudiar la convergencia puntual y uniforme de la sucesión de funciones dada por

$$f_n(x) = \begin{cases} (n-1)x, & \text{si } x \in [0, \frac{1}{n}) \\ 1-x, & \text{si } x \in [\frac{1}{n}, 1] \end{cases} .$$

Representar gráficamente sus primeros términos.

**7.9** Hallar $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, siendo $f_n(x) = n(1-x^2)^{n^2}x$. ¿Qué se puede decir de la convergencia uniforme de $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $[0,1]$?

**7.10** Sean $f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^{2n}}$.

a) Hallar el conjunto de convergencia y la función límite.

b) Estudiar la convergencia uniforme en $[1,2]$, en $[2,3]$ y en $[2,4]$.

**7.11** Sea $f$ una función continua en $[0,1]$ tal que $f(1)=0$. Probar que la sucesión de funciones $g_n\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por $g_n(x) = x^n f(x)$ converge uniformemente en $[0,1]$.