Ejercicios adicionales de Complementos de Análisis. 2015

1. Analiza los siguientes límites. Prueba por definición tus afirmaciones.

   1.1 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^5+3n-2}{n^4+3n+1}$ $(n\in\mathbb{N})$

   1.2 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{4/5}+3}{n^{2/3}-3}$ $(n\in\mathbb{N})$

   1.3 $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left[\ln(n^2+1)-\ln(3n^2+5)\right]$ $(n\in\mathbb{N})$

   1.4 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^2+3n-1}$ $(n\in\mathbb{N})$

   1.5 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)\,5^n}{n!}$ $(n\in\mathbb{N})$

   1.6 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^4+1}{x^2-4}$ $(x\in\mathbb{R})$

   1.7 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^6+x^2+7}{x^2-9}$ $(x\in\mathbb{R})$

   1.8 $\lim\limits_{x\to 1} x^2 sen\dfrac{1}{x-1}$ $(x\in\mathbb{R})$

2. Analizar la existencia de los límites de $(a_n)_n$ y $\left(\sqrt{a_n}\right)_n$ siendo $a_n=5-(-1)^n$.Justificar.

3. Dada $(x_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de Cauchy probar que es acotada.

4. Sean $(x_n)_n,(y_n)_n$ dos sucesiones que verifican que $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n-y_n|=0$ t además $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$. ¿Podrá ser el $\lim\limits_{n\to\infty}y_n$ distinto de a?

5. Dada $(x_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de Cauchy probar que es convergente. ¿Vale siempre la recíproca?. Justifique.

6. Sabiendo que $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=2$ y $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$. Calcular $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)+g(x)$ y probarlo por definición.

7. Sean $f(x)$. y $g(x)$ funciones definidas y continuas en $[a,b]$. Probar que $f(x).g(x)$ es continua en $[a,b]$ (Sug. sumar y restar algo conveniente).

8. Sean $f(x)$. y $g(x)$ funciones definidas y continuas en $[a,b]$, derivables en $x_0\in(a,b)$ Probar por definición que $f(x)+g(x)$ es derivable en x_0

9. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dos veces derivable tal que $f(0)=2; f'(0)=\frac{5}{6}$ y $f''(0)=5$.
   Se define $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ por $g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(6x)-2}{5x} & si\ x\neq 0\\ 1 & si\ x=0\end{cases}$

   (a) Analizar la continuidad de g en $\mathbb{R}$.

   (b) ¿Es g derivable en 0?

10. a) En el punto $P=(1,1)$, la recta $y=x$ es tangente a la parábola $y=x^2+bx+c$. Hallar los valores de b y c.

    b) Hallar la ecuación de la recta normal a la parábola encontrada en a) en el mismo punto P.

11. ¿Será continua en toda la recta $f(x)=\begin{cases}2 & x=0\\ \dfrac{x^2\operatorname{sen}\frac{1}{x}}{\operatorname{sen}x} & x\neq 0\end{cases}$? Justificar las respuestas.