Final de Complementos de Análisis. 23 de Septiembre de 2011

1. Sea $f(x) = \begin{cases} x^{2x} & x > 0 \\ k & x \leq 0 \end{cases}$

   (a) (1 pto.) Determinar el valor de k para que la función sea continua en toda la recta real. Justificar.

   (b) (1 pto) Para ese valor de k hallado, ¿será $f(x)$ derivable en $x = 0$?. Justificar.

2. a)(0,50ptos.) Sea $f : A \to \mathbb{R}$ con $A \subset \mathbb{R}$ una función continua. ¿Qué significa que $f(x)$ sea uniformemente continua?. Defínalo.

   b)(0,50ptos.) Demuestre que si $f : A \to \mathbb{R}$ es continua y A es un intervalo cerrado, entonces es uniformemente continua.

   c)(1pto.) De un ejemplo de una función continua que no sea uniformemente continua. Justifique.

3. (1,50 ptos) Demuestre por definición que si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -1$ y $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} a_n.b_n = -\infty$.

4. (2 ptos) Analizar la convergencia de $a) \displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{7+x^3}$ $\quad b) \displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{(6+x^3)^{1/3}}$. Enuncie el criterio que usa en cada caso.

5. a) (0,50 ptos) Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones definidas en algún conjunto A de la recta.¿Qué significa que la sucesión converja puntualmente a $f(x)$ en A?¿Y uniformemente?

   b) (1pto) Analice la convergencia puntual y uniforme en toda la recta de $f_n(x) = \dfrac{\operatorname{sen} n^2 x}{n}$

   c) (1pto)¿Es cierto que si la sucesión converge uniformemente, y los miembros de la sucesión son derivablesentoncesla sucesión delas derivadas también convergen?

Final de Complementos de Análisis. 23 de Septiembre de 2011

1. Sea $f(x) = \begin{cases} x^{2x} & x > 0 \\ k & x \leq 0 \end{cases}$

   (a) (1 pto.) Determinar el valor de k para que la función sea continua en toda la recta real. Justificar.

   (b) (1 pto) Para ese valor de k hallado, ¿será $f(x)$ derivable en $x = 0$?. Justificar.

2. a)(0,50ptos.) Sea $f : A \to \mathbb{R}$ con $A \subset \mathbb{R}$ una función continua. ¿Qué significa que $f(x)$ sea uniformemente continua?. Defínalo.

   b)(0,50ptos.) Demuestre que si $f : A \to \mathbb{R}$ es continua y A es un intervalo cerrado, entonces es uniformemente continua.

   c)(1pto.) De un ejemplo de una función continua que no sea uniformemente continua. Justifique.

3. (1,50 ptos) Demuestre por definición que si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -1$ y $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} a_n.b_n = -\infty$.

4. (2 ptos) Analizar la convergencia de $a) \displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{7+x^3}$ $\quad b) \displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{(6+x^3)^{1/3}}$. Enuncie el criterio que usa en cada caso.

5. a) (0,50 ptos) Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones definidas en algún conjunto A de la recta.¿Qué significa que la sucesión converja puntualmente a $f(x)$ en A?¿Y uniformemente?

   b) (1pto) Analice la convergencia puntual y uniforme en toda la recta de $f_n(x) = \dfrac{\operatorname{sen} n^2 x}{n}$

   c) (1pto)¿Es cierto que si la sucesión converge uniformemente, y los miembros de la sucesión son derivablesentoncesla sucesión delas derivadas también convergen?